

51  
*Separatum*

# PUBLICATIONES MATHEMATICAE

TOMUS 17.  
FASC. 1—4.

DEBRECEN  
1970

FUNDAVERUNT:

A. RÉNYI, T. SZELE ET O. VARGA

COMMISSIO REDACTORUM:

B. GYIRES, A. KERTÉSZ, A. RAPCSÁK

SECRETARIUS COMMISSIONIS:

B. BARNA

F. Szász

Beiträge zur Radikalthorie der Ringe

INSTITUTUM MATHEMATICUM UNIVERSITATIS DEBRECENIENSIS  
HUNGARIA

## Beiträge zur Radikaltheorie der Ringe

Von F. SZÁSZ (Budapest)

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Note stets einem assoziativen Ring. Bezüglich der nötigen Grundbegriffe verweisen wir auf die Bücher DIVINSKY [4], JACOBSON [7], KERTÉSZ [8], KUROSC [9], LAMBEK [10] und RÉDEI [13], insbesondere bezüglich der Radikale auf ANDRUNAKIEWITSCH [1], [2] und DIVINSKY [4].

Das Ziel dieser Note ist dreifach.

Einerseits wünschen wir ein wörtlich — in einer persönlichen Diskussion — aufgeworfenes Problem von R. WIEGANDT bezüglich der Existenz eines solchen erblichen Radikals lösen, für das jeder halbeinfache Ring auch streng halbeinfach ist. Wir zeigen nämlich die Existenz solcher speziellen, also supernilpotenten Radikale, und zwar solcher Radikale  $R_n$  für jede natürliche Zahl  $n$ , für die jeder  $R_n$ -halbeinfache Ring auch kommutativ ist, und aus der Isomorphie  $A_m \cong A_n$  für die  $R_m$ -halbeinfache Ringe  $A_m$  bzw.  $R_n$ -halbeinfache Ringe  $A_n$  auch stets  $m=n$  folgt. Die Radikale  $R_n$  sind größer, als das Brown—McCoysche Radikal. Das Radikal  $R_n$  darf *verallgemeinertes antibooleches Radikal* genannt werden.

Andererseits werden wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür bestätigen, damit ein beliebiger Ring antieinfach ist. Ein Ring ist bekanntlich dann antieinfach, wenn er auf keinen von Null verschiedenen subdirekt irreduziblen Ring mit idempotentem Herz homomorph abgebildet werden kann.<sup>1)</sup> Die antieinfachen Ringe wurden ausführlich von Andrunakiewitsch ([1]) untersucht.

Drittens wollen wir einige Eigenschaften einfacher Jacobsonscher Radikalringe bestätigen. Dafür benützen wir die s.g. quasiinneren Automorphismen der Ringe. Bekanntlich ist die Existenz der (nichtnilpotenten) einfachen Jacobsonschen Radikalringe von SĄSIADA ([15]) bzw. COHN—SĄSIADA ([3]) gezeigt.

Es gilt für die Lösung des erwähnten Problems von R. Wiegandt in einer schärferen Form der folgende

<sup>1)</sup> Hiernach ist freilich jedes homomorphe Bild eines antieinfachen Ringes eine subdirekte Summe von subdirekt irreduziblen Ringen mit nilpotentem Herzen. Insbesondere ist jeder transfinit nilpotente Ring auch antieinfach. Das maximale antieinfache Ideal eines Ringes ist ein Amitsur—Kurosch-sches Radikal. Das wird das antieinfache Radikal genannt. Dieses ist ebenfalls ein spezielles Radikal, und es ist mit dem Jacobsonschen Radikal nach Beispielkonstruktionen [15], [16] im allgemeinen unvergleichbar. Die Konstruktion [15] ist auch deshalb außerordentlich wichtig. In einem Sasiadaschen Ring  $A$  ist nämlich das antieinfache Radikal 0, und das Jacobsonsche Radikal stimmt mit  $A$  selbst überein. Dagegen ist in [16] ein solcher primitive, subdirekt reduzierbare Ring betrachtet, dessen jedes homomorphe Bild nilpotent ist. Daher ist im letzteren Ring das antieinfache Radikal echt kleiner, als das Jacobsonsche Radikal.



**Satz 1.** Es gibt zu jeder natürlichen Zahl  $n$  ein erbliches sogar ein spezielles Radikal  $R_n$  derart, daß  $R_n$  folgende Eigenschaften besitzt:

- 1) jeder  $R_n$ -halbeinfache Ring ist streng  $R_n$ -halbeinfach;
- 2) jeder  $R_n$ -halbeinfache Ring ist kommutativ;
- 3) ist  $A_i$  ein  $R_i$ -halbeinfacher Ring, so ergibt sich aus der Isomorphie  $A_m \cong A_n$  stets  $m=n$ .

**BEWEIS.** Es seien  $K_n$  bzw.  $L_n$  für jede feste natürliche Zahl  $n$  die Klasse derjenigen kommutativen Körper  $A_n$ , bzw. derjenigen Ringe  $B_n$ , für die  $a^n = a$  für jedes Element  $a \in A_n$  bzw.  $a \in B_n$  bestehen. Nach dem wohlbekannten Satz von Jacobson ([7], Theorem 10.1.1) ist jeder Ring  $A_n$  aus  $K_n$  und jeder Ring  $B_n$  aus  $L_n$  kommutativ. Da jeder Ring  $B_n$  aus  $L_n$  auch halbeinfach im Jacobson'schen Sinne ist, ist  $B_n$  eine subdirekte Summe von primitiven Ringen, die jetzt nach Theorem 1.4.1 von Jacobson [7] Körper sind. Also ist jeder Ring  $B_n$  aus  $L_n$  eine subdirekte Summe von Körpern  $A_n$  aus der Klasse  $K_n$ . Umgekehrt ist jede subdirekte Summe der Ringe  $B_n$  aus  $L_n$  ebenfalls ein Ring  $B_n^*$  aus  $L_n$ , denn die Bedingung  $a^n = a$  für jedes Element erbt jeder Unterring, bzw. jedes homomorphe Bild und auch die komplette direkte Summe der Ringe  $B_n$  aus  $L_n$ .

Wir zeigen, daß die Klasse  $K_n$  eine spezielle Ringklasse ist ([4]), d.h. folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1) jeder Ring aus  $K_n$  ist ein Primring;
- 2) jedes Ideal eines Ringes aus  $K_n$  liegt ebenfalls in  $K_n$ ;
- 3) liegt ein Ideal  $I$  eines Ringes  $A$  in  $K_n$ , und ist  $I^*$  der zweiseitige Annihilator von  $I$  in  $A$ , so gilt auch  $A/I^* \in K_n$ . Die Bedingungen 1) und 2) sind trivial erfüllt. Da jeder Ring aus  $K_n$  zweiseitiges Einselement besitzt, ist das Ideal  $I$  des Ringes  $A$  beim Beweis der Gültigkeit der Bedingung 3) ein direkter Summand von  $A$ , und somit gilt  $A = I \oplus J$ . Da  $I$  ein Primring ist, ergibt sich  $I^* = J$  für den Annihilator  $I^*$ , und daher gilt  $A/I^* \cong I \in K_n$ . Also ist  $K_n$  wirklich eine spezielle Ringklasse.

Es ist zu bemerken, daß  $L_n$  im allgemeinen keine spezielle Ringklasse ist, denn  $L_n$  enthält nicht nur Primringe. Dagegen gilt 2) trivial für die Klasse  $L_n$ . Man kann auch 3) für  $L_n$  folgendermaßen beweisen. Es gilt  $i^n = i$  für jedes  $i \in I$  und somit  $(ai)^n = ai$  und  $(ia)^n = ia$ , denn  $I$  ist ein Ideal im Ring  $A$ . Wegen der Kommutativität des Ideals  $I$  von  $A$  läßt sich  $(ai)^k = a^k i^k$  bzw.  $(ia)^k = i^k a^k$  mit vollständiger Induktion nach  $k$  beweisen, woraus man

$$(ai) = (ai)^n = a^n i^n = a^n i, \quad (a^n - a)i = 0$$

und ähnlich  $i(a^n - a) = 0$  erhält. Es gilt also  $a^n - a \in I^*$  für jedes  $a \in A$  und somit  $A/I^* \in L_n$ .

Die Klasse  $L_n$  ist also schwach speziell ([14]), aber nicht speziell. Dagegen läßt sich ein Ring  $A$  nach dem vorigen dann und nur dann auf einen von Null verschiedenen Ring aus  $L_n$  homomorph abbilden, wenn  $A$  auch auf einen von Null verschiedenen Ring aus  $K_n$  homomorph abgebildet werden kann.

Die im Satz erwähnte Radikaleigenschaft  $R_n$  sei jetzt folgendermaßen definiert: Ein Ring  $A$  ist genau dann ein  $R_n$ -Ring, wenn  $A$  auf keinen von Null verschiedenen Ring aus der Klasse  $K_n$  homomorph abgebildet werden kann.

Da  $K_n$  eine spezielle Ringklasse darstellt, ist  $R_n$  wirklich eine Radikaleigenschaft im Amitsur-Kurosch'schen Sinne, sogar ist  $R_n$  ein spezielles Radikal nach

Divinsky [4]. Die  $K_n$ , denn  $S_n$  stimmt

Da aber jedes jeder  $R_n$ -halbeinfache erbliches Radikal, und 3) des verallgemeinerten, w. z. b. w.

**Bemerkung.** Man angeben, die die halbeinfache ein anderes Radikal

Um ein Kriterium folgende

**Satz 2.** Für ein

- 1)  $A$  ist antielementar
- 2) es gilt  $(a)^2 = b$  des Quadrates  $(a)$

**BEWEIS.** Aus 1) gibt es ein Hauptideal  $\neq (a+b)$ . Dann existiert solches maximales Ideal von  $A/M$  entfällt

(\*)

Das ist aber unmöglich, da es Herzkreislauf aus 1).

Aus 2) folgt 1) Bedingung 2) in jeder subdirekt irreduziblen homomorph abbildbar ist, erhält man  $H^2 = H$  ergibt sich  $A$ , das bei der Isomorphie  $h \in H^2$  gewiß  $(a) +$

woraus  $(a-b) = 0$

$(a-b)$

was der Bedingung

<sup>2)</sup> Wir bemerken Mass ähnlich der Korollar Radikalring explizit: Ungültigkeit von 2) ist bestätigt, kann in der ersten dem ersten Bewe



gar ein spezielles Radikal

der Isomorphie  $A_m \cong A_n$

Zahl  $n$  die Klasse derjenigen für die  $a^n = a$  für jedes  $a$  in  $A$ . Nach dem Satz von Jacobson ist  $A$  ein kommutativer Ring. Nach Theorem 1.4.1 ist  $A$  eine subdirekte Summe von subdirekten Summen der Ringklasse  $A^n = a$  für jedes  $a$  in  $A$  und auch die komplette

ist ([4]), d.h. folgende

zweiseitige Annihilator  $I$  und 2) sind trivial erfüllt. Das Ideal  $I$  des Ringes  $A$  ist ein Summand von  $A$ , und  $A/I$  für den Annihilator  $I$  ist eine spezielle Ringklasse. Die Ringklasse ist, denn  $A/I$  ist eine Klasse  $L_n$ . Man kann  $A/I$  jedes  $i \in I$  und somit  $A/I$  in der Kommutativität vollständiger Induktion

0

jedes  $a \in A$  und somit

speziell. Dagegen läßt sich zeigen, daß  $A/I$  von Null verschieden ist. Ein von Null verschieden

gendermaßen definiert:  $A/I$  von Null verschiedenen

nach eine Radikaleigen-  
spezielles Radikal nach

Divinsky [4]. Die Klasse  $S_n$  aller  $R_n$ -halbeinfachen Ringe ist freilich größer, als  $K_n$ , denn  $S_n$  stimmt nach Divinsky [4], Lemma 80, genau mit der Klasse  $L_n$  überein.

Da aber jedes homomorphe Bild eines Ringes aus  $L_n$  ebenfalls in  $L_n$  liegt, ist jeder  $R_n$ -halbeinfache Ring auch streng  $R_n$ -halbeinfach. Dabei ist  $R_n$  auch ein erbliches Radikal, denn  $R_n$  ist speziell. Die im Satz 1 erwähnten Eigenschaften 2) und 3) des verallgemeinerten antibooleschen Radikals  $R_n$  lassen sich trivial bestätigen, w. z. b. w.

**Bemerkung.** Mit der Hilfe der obigen Klassen  $L_n$  kann man solche Ringklassen angeben, die die halbeinfachen Klassen für ein Radikal, und die Radikalklassen für ein anderes Radikal sind.

Um ein Kriterium für die Antieinfachheit eines Ringes anzugeben, gilt der folgende

**Satz 2.** Für einen Ring  $A$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- 1)  $A$  ist antieinfach;
- 2) es gilt  $(a) = (a+b)$  für jedes Hauptideal  $(a)$  von  $A$  und für jedes Element  $b$  des Quadrates  $(a)^2$  von  $(a)$ .

**BEWEIS.** Aus 1) folgt 2). Nehmen wir an, daß 1) gilt, aber 2) nicht gilt. Dann gibt es ein Hauptideal  $(a)$  von  $A$  und ein Element  $b \in (a)^2$  mit der Bedingung  $(a) \neq (a+b)$ . Dann ergibt sich  $a \notin (a+b)$ . Nach dem Lemma von Zorn existiert ein solches maximales Ideal  $M$  von  $A$ , für das  $a \notin M$  und  $M \supseteq (a+b)$  bestehen. Dann ist der Faktorring  $A/M$  subdirekt irreduzibel, denn jedes von Null verschiedene Ideal von  $A/M$  enthält  $a+M$ . Wegen  $a+b \in M$  ergibt sich  $b+M = a+M$ , und somit

$$(*) \quad (a) + M = (a)^2 + M$$

Das ist aber unmöglich, denn nach 1) ist mit  $A$  auch  $A/M$  antieinfach, und gleichzeitig ist das Herz  $(a) + M/M$  von  $A/M$  nach (\*) idempotent. Also folgt 2) wirklich aus 1).

Aus 2) folgt 1). Nehmen wir an, daß 2) gilt, aber 1) nicht gilt. Dann ist die Bedingung 2) in jedem homomorphen Bild von  $A$  erfüllt, und  $A$  läßt sich auf einen subdirekt irreduziblen Ring  $S$  mit idempotentem Herzen  $H$  nach der Voraussetzung homomorph abbilden. Es gibt also ein Ideal  $I$  von  $A$  mit  $A/I \cong S$ . Da  $H$  in  $S$  minimal ist, erhält man  $H = (h)$  für jedes von Null verschiedene Element  $h \in H$ . Wegen  $H^2 = H$  ergibt sich auch  $h \in H^2$ . Es sei nun  $a \in A$  ein solches Element des Ringes  $A$ , das bei der Isomorphie  $A/I \cong S$  auf  $h$  abgebildet wird. Dann erhält man wegen  $h \in H^2$  gewiß  $(a) + I = (a)^2 + I$ . Es gibt also ein  $b \in (a)^2$  und ein  $i \in I$  mit

$$a = b + i,$$

woraus  $(a-b) = (i) \subseteq I$  folgt. Wegen

$$(a-b) + I = I \quad \text{und} \quad (a) + I \neq I \quad \text{gilt} \quad (a) \neq (a-b),$$

was der Bedingung 2) widerspricht. Also folgt 1) aus 2), womit Satz 2 bewiesen ist.<sup>2)</sup>

<sup>2)</sup> Wir bemerken, daß der Beweis der Behauptung „aus 1) folgt 2)“ des Satzes 2 in gewissem Mass ähnlich der Konstruktion von E. Sasiada ([15]) ist, wodurch er einen einfachen Jacobson'schen Radikalring explizit angegeben hat. Ein exakter Beweis von einem Lemma, das im wesentlichen die Ungültigkeit von 2) in einem konkreten, von E. Sasiada betrachteten, Jacobson'schen Radikalring bestätigt, kann in der gemeinsamen Arbeit von P. M. Cohn—E. Sasiada ([3]) gefunden werden. Auch eine dem ersten Beweisteil ähnliche Methode wurde von Verfasser (17) für ein anderes Ziel benutzt.



Für die Betrachtung einiger Eigenschaften der einfachen Jacobson'schen Radikalringe, benötigen wir eine Vorbereitung. In jedem Jacobson'schen Radikalring  $A$  ist die Abbildung

$$\varphi_a: x \rightarrow (1-a)x(1-a)^{-1}$$

für jedes feste Element  $a \in A$  ein Ringautomorphismus, der *quasiinner* genannt werden kann. Hierbei ist  $1$  freilich ein Operator, und  $(1-a)^{-1}$  existiert bekanntlich für jedes  $a \in A$  und stimmt mit  $1-b$  überein, wobei  $a+b-ab = a \circ b = 0$  ist. Weiterhin bezeichne  $\hat{x}$  die Menge aller quasiinneren automorphen Bilder  $x\varphi_a$  von  $x$  für jedes Element  $a$  des Ringes.<sup>3)</sup>

Es gilt der

**Satz 3.** Es sei  $A$  ein einfacher Jacobson'scher Radikalring, der eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i)  $A$  hat kein von Null verschiedenes Element, das gleichzeitig ein Linksnullteiler und Rechtsnullteiler in  $A$  ist;
- (ii)  $A$  hat kein von Null verschiedenes nilpotentes Element;
- (iii)  $A$  ist nullteilerfrei;
- (iv)  $A$  ist anordnungsfähig.

Dann ist die Menge  $\hat{x}$  für jedes von Null verschiedene Element  $x \in A$  unendlich.

**BEWEIS.** Offenbar folgt aus (iv) auch (iii) und aus (iii) ergibt sich (ii), weiterhin hat (ii) trivial (i) zur Folge. Deshalb genügt es zu zeigen, daß die Menge  $\hat{x}$  in jedem einfachen Jacobson'schen Radikalring mit der Bedingung (i) nur für  $x=0$  endlich ist.

Nehmen wir an, daß  $A$  ein einfacher Jacobson'scher Radikalring ist, der die Bedingung (i) erfüllt, und ein Element  $x$  besitzt, für das  $\hat{x}$  eine endliche Menge ist. Dann sei das Element  $y$  durch

$$y = \prod_{z \in \hat{x}} z = \prod_{a \in B \subseteq A} x\varphi_a \quad (B \text{ ist eine Teilmenge von } A)$$

definiert. Wir werden  $y=0$  zeigen, was der Bedingung (i) widersprechen wird. Wegen der Symmetrie von  $y$  erhält man nämlich  $y\varphi_a = y$  für jedes  $\varphi_a$ , und daher ist das Rechtsideal  $R = yA$  invariant bezüglich aller quasiinversen Automorphismen  $\varphi_a$ . Dann ergibt sich wegen  $(1-a)R(1-a)^{-1} \subseteq R$  offenbar  $(1-a)R \subseteq R$  und somit gilt  $aR \subseteq R$  für jedes  $a \in A$ , also  $AR \subseteq R$ . Hiernach ist  $R$  ein zweiseitiges Ideal im einfachen Ring  $A$ , woraus entweder  $yA = A$  oder  $yA = 0$  folgt. Im ersten Falle gibt es Elemente  $u \in A$ ,  $v \in A$  mit  $yu = y$  und  $u+v-uv = 0$ , was

$$y = y(1-u)(1-v) = (y-yu)(1-v) = 0$$

<sup>3)</sup> Ist der Jacobson'sche Radikalring kommutativ oder endlich (im letzteren Fall ist er auch nilpotent), so ist  $\hat{x}$  für jedes  $x \in A$  eine endliche Menge. Deshalb bedeutet die Klasse derjenigen Jacobson'schen Radikalringe  $A$ , für die  $\hat{x}$  für jedes Element  $x \in A$  eine endliche Menge ist, eine solche gleichzeitige Verallgemeinerung der kommutativen, Jacobson'schen Radikalringe und der endlichen Jacobson'schen Radikalringe, wie die Klasse der vom Verfasser [18] betrachteten „nicht  $\Omega$ -Ringe“ eine gleichzeitige Verallgemeinerung der Artinschen Ringe und der kommutativen Ringe. Ähnlich ist die Klasse der von B. H. Neumann ([11]) von und J. Erdős ([5]) betrachteten FC-Gruppen eine simultane Verallgemeinerung der endlichen Gruppen und der kommutativen Gruppen.

zur Folge hat. Eber von  $A$ . In beiden F

Daraus ergibt sich a

(i) widerspricht, we

**Satz 4.** Es gil  
Jacobson'schen Rad.

**BEWEIS.** Das l  
bezüglich aller quas  
des Satzes 3, ein z

**Problem 1.** Gilt  
ring?

**Problem 2.** Wi  
Radikalringe mögli  
schiedene Ringeler

<sup>4)</sup> Für anordnung  
statt des Elementes  $y =$   
dann formal reell. Ein  
Nilring, denn die Pote

chen Jacobson'schen  
obson'schen Radikal-

zur Folge hat. Ebenfalls folgt  $y=0$  im Falle  $yA=0$  aus der Linksannihilatorfreiheit von  $A$ . In beiden Fällen erhält man also  $y=0$ , folglich

$$\prod_{i=1}^k (1-a_i)x(1-a_i)^{-1} = 0$$

quasiinner genannt  
existiert bekanntlich  
 $-ab = a \circ b = 0$  ist.  
phen Bilder  $x\varphi_a$  von

Daraus ergibt sich auch  $x(\prod_{i=2}^{k-1} x\varphi_{a_i})x=0$ , was im Falle  $x \neq 0$  wirklich der Bedingung (i) widerspricht, wenn  $k$  möglichst klein gewählt ist. Es gilt also  $x=0$ , w. z. b. w.<sup>4)</sup>

er eine der folgenden

**Satz 4.** Es gilt mit den obigen Bezeichnungen  $A = \sum_{z \in \hat{x}} zA$  für jeden einfachen Jacobson'schen Radikalring  $A$  und für jedes von Null verschiedene Element  $x \in A$ .

zeitig ein Linksnull-

**BEWEIS.** Das Rechtsideal  $R = \sum_{z \in \hat{x}} zA$  ist von Null verschieden und invariant bezüglich aller quasiinversen Automorphismen und somit ist  $R$ , ähnlich dem Beweis des Satzes 3, ein zweiseitiges Ideal, woraus  $R=A$  folgt.

$\in A$  unendlich.

**Problem 1.** Gibt es einen anordnungsfähigen einfachen Jacobson'schen Radikalring?

st sich (ii), weiterhin  
e Menge  $\hat{x}$  in jedem  
ur für  $x=0$  endlich

**Problem 2.** Wie kann die Bedingung (i) im Satz 3 für einfache Jacobson'sche Radikalringe möglichst weit abgeschwächt werden, daß  $\hat{x}$  für jedes von Null verschiedene Ringelement  $x$  eine unendliche Menge sei?

ikalring ist, der die  
endliche Menge ist.

n  $A$ )

widersprechen wird.  
des  $\varphi_a$ , und daher  
n Automorphismen  
enbar  $(1-a)R \subseteq$   
 $R \subseteq R$ . Hiernach ist  
 $vA=A$  oder  $yA=0$   
und  $u+v-uv=0$ ,

en Fall ist er auch nil-  
lasse derjenigen Jacob-  
Menge ist, eine solche  
nge und der endlichen  
teten „nicht  $\Omega$ -Ringe“  
ativen Ringe. Ähnlich  
ten FC-Gruppen eine  
n Gruppen.

<sup>4)</sup> Für anordnungsfähige einfache Jacobson'sche Radikalringe darf im Beweis des Satzes 3 statt des Elementes  $y = \prod z(z \in \hat{x})$  auch das Element  $y_1 = \sum z^2(z \in \hat{x})$  betrachtet werden, denn  $A$  ist dann formal reell. Ein formal reeller einfacher Jacobson'scher Radikalring ist aber gewiß kein Nilring, denn die Potenzen positiver Elemente sind auch positiv.



## Literaturverzeichnis

- [1] W. A. ANDRUNAKIEWITSCH, Antieinfache und streng idempotente Ringe, *Ist. Akad. Nauk SSSR* **21** (1957), 125—144 (Russisch).
- [2] W. A. ANDRUNAKIEWITSCH, Radikale von assoziativen Ringen, *Mat. Sbor.* **44** (86) (1958), 179—212 (Russisch).
- [3] P. M. COHN—E. SĄSIADA, An example of a simple radical ring, *Jour. Algebra* **4** (1967) 373—377.
- [4] N. DIVINSKY, Rings and Radicals, *London* (1965).
- [5] J. ERDŐS, The theory of groups with finite classes of conjugate elements, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **5** (1954), 45—58.
- [6] N. JACOBSON, The Theory of Rings, *New York* (1943).
- [7] N. JACOBSON, Structure of Rings, *Providence* (1964).
- [8] A. KERTÉSZ, Vorlesungen über Artinsche Ringe, *Budapest* (1968).
- [9] A. G. KUROSCCH, Gruppentheorie (Russisch) (1967).
- [10] J. LAMBEK, Lectures on rings and modules, *Massachusetts—Toronto—London* (1966).
- [11] B. H. NEUMANN, Groups with finite classes of conjugate elements, *Proc. London Math. Soc.* **1** (1951), 178—187.
- [12] E. C. POSNER, Left valuation rings and simple radical rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **107** (1963), 458—465.
- [13] L. RÉDEI, Algebra, I. *Leipzig* (1959).
- [14] JU. M. RJABUHIN, Supernilpotente und spezielle Radikale, *Isledov. Algebre i Matem. Anal. A. N. Moldav. SSR* (1965), 65—72 (Russisch).
- [15] E. SĄSIADA, Solution of the problem of existence of simple radical ring, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **9** (1961), 257.
- [16] E. SĄSIADA—A. SULINSKI, A note on Jacobson radical, *Bull. Acad. Polon. Sci.* **10** (1962), 421—423.
- [17] F. SZÁSZ, Bemerkungen über Rechtssockel und Nilringe, *Monatshefte f. Math.* **67** (1963), 359—362.
- [18] F. SZÁSZ, Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonschen Radikals, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 261—272.

(Eingegangen am 13. December 1968.)

Gyires, B., Alfréd Rér  
 Tamássy, L., Ottó Va  
 Szabó, J., Die Verallg  
 Arlotti, L., On a char  
 distributions ...  
 Stöckert, B., Über das  
 Adams, D., Prime and  
 Świątak, H. and Hoss:  
 Chidambaraswamy, J.,  
 van Benthem Jutting, I  
 Mashhour, A. S., New  
 Kummer, R. und Rens  
 Gerhardts, M. D., Schi  
 Tandori, K., Bemerkur  
 nomen .....  
 Shafaat, A., Two isoto  
 Berg, L., Über irregulä  
 Makai, I., Zur Theorie  
 Burýšek, S., On Symm  
 Fenyves, F., On  $J_n$ -gro  
 Allen, P. J., Cohen's tl  
 Györy, K. and Lovász,  
 Timm, J., Zur gruppen  
 Ahmad, M., On the int  
 Losonczi, L., Über der  
 Szász, G., Eine Charak  
 Gupta, R. N., Characte  
 Conrad, P. and Teller,  
 Pirtle, E. M., A note c  
 Haneke, W., Ein neuer  
 Świątak, H., On the re  
 $\Sigma A_{ij} f(\Sigma a_{ij}, x_j) :$   
 Szász, F., Beiträge zur  
 Gupta, D. P. and Khoti  
 Schmidt, E. T., Eine V  
 Daróczy, Z. und Loson  
 Mader, A., The fully Ir  
 Royster, W. C. and Su  
 Pilz, G.,  $\Omega$ -Groups wi  
 Lanckau, R., Das veral  
 Бузауи, К., Нормали  
 Гайекун, Л. М., Супе  
 Кованюев, Н. Н., Из  
 мерного прост  
 Bibliographie .....